BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút
(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2$

b) $\begin{cases} x\left(x+\dfrac{4}{y}\right)+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x\left(2+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$

Câu 2: (2 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0$.

b) Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Câu 3: (1 điểm)

Cho x và y là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x+y\le 1$. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(x^2+\dfrac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)$.

Câu 4: (4 điểm)

a) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BC tại E. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt CD tại F. Chứng minh O, E, F thẳng hàng.

b) Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N. Chứng minh $MN\perp CD$.

Câu 5: (1 điểm)

Sau khi điểm danh xong, lớp trưởng tuyên bố: “Số các bạn có mặt là một số có hai chữ số, số này bé hơn 2 lần tích hai chữ số của nó 9 đơn vị”. Hỏi có bao nhiêu bạn có mặt?

HẾT

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2015-2016
MÔN THI: TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)
Thời gian: 150 phút

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2$

$$(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2$$
$$\Leftrightarrow (12x+4)(12x+3)(12x+2)(12x+1)=48$$
$$\Leftrightarrow (12x+4)(12x+1)(12x+3)(12x+2)=48$$
$$\Leftrightarrow (144x^2+60x+4)(144x^2+60x+6)=48$$

Đặt $t=144x^2+60x+5$

Phương trình trở thành: $(t-1)(t+1)=48 \Leftrightarrow t^2=49 \Leftrightarrow t=7$ hay $t=-7$

TH1: t = 7 $\Rightarrow 144x^2+60x+5=7 \Leftrightarrow 144x^2+60x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{24}$

TH1: t = -7 $\Rightarrow 144x^2+60x+5=-7 \Leftrightarrow 144x^2+60x+12=0 \Leftrightarrow \left(12x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}=0$ (vô nghiệm)

Vậy $S=\left\{\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{24}\right\}$

b) $\begin{cases} x\left(x+\dfrac{4}{y}\right)+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x\left(2+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$

Điều kiện: $y\neq 0$

$$\begin{cases} x\left(x+\dfrac{4}{y}\right)+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x\left(2+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4.x.\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ 2x+x.\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+2.x.\dfrac{1}{y}=2 \\ 2\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+x.\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$$

Do đó $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=-4 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{y}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{y}=2$

Nên $2^2+2.x.\dfrac{1}{y}=2 \Leftrightarrow x.\dfrac{1}{y}=-1$

Ta có

$$x(2-x)=-1 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

• Xét $x=1+\sqrt{2}$. Mà $x+\dfrac{1}{y}=2$. Do đó $\dfrac{1}{y}=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow y=-1-\sqrt{2}$

• **Xét** $x = 1 - \sqrt{2}$. **Mà** $x + \frac{1}{y} = 2$. **Do đó** $\frac{1}{y} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow y = \sqrt{2} - 1$

Thử lại ta thấy $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$ **là nghiệm của hệ phương trình.**

Vậy nghiệm (x;y) của hệ phương trình là $(1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1)$.

Cách 2:

a) $\begin{cases} x\left(x + \frac{4}{y}\right) + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$

Điều kiện: $y \neq 0$, **đặt** $z = \frac{1}{y}$, **hệ phương trình trở thành:**

$$\begin{cases} x\left(x + \frac{4}{y}\right) + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 4z) + z^2 = 2 \\ x(2 + z) + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4xz + z^2 = 2 \\ 2x + xz + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xz + z^2 = 2 - 2xz \\ 2(x + z) = 3 - xz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + z)^2 = 2 - 2xz \\ (x + z) = \frac{3 - xz}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3 - xz}{2}\right)^2 = 2 - 2xz \Leftrightarrow 9 - 6xz + (xz)^2 = 8 - 8xz \Leftrightarrow (xz)^2 + 2xz + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xz + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow xz = -1 \Rightarrow x.\frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow x = -y$$

Thế x= -y vào phương trình $x\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 3$, **ta được:**

$$(-y)\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow -2y - 1 + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow -y - 2 + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow -y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 + \sqrt{2} \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Với $y = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

Với $y = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$ **hay** $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Câu 2: (2 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

Ta có: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6y^2 - 15xy + 3x - 6y - 21 = 0$

$\Leftrightarrow (3x)^2 - 3x(5y - 1) - 6y^2 - 6y - 21 = 0$

$\Leftrightarrow (3x)^2 - 2.(3x)\left(\frac{5y - 1}{2}\right) + \left(\frac{5y - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5y - 1}{2}\right)^2 - 6y^2 - 6y - 21 = 0$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{5y-1}{2}\right)^2-\frac{25y^2-10y+1+24y^2+24y+84}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{5y-1}{2}\right)^2-\frac{\left(49y^2+14y+1\right)+84}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{5y-1}{2}\right)^2-\left(\frac{7y+1}{2}\right)^2=21$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{5y-1}{2}-\frac{7y+1}{2}\right)\left(3x-\frac{5y-1}{2}+\frac{7y+1}{2}\right)=21$$

$$\Leftrightarrow(3x-6y)(3x+y+1)=21$$

$$\Leftrightarrow(x-2y)(3x+y+1)=7$$

Do 7 = 1.7 = 7.1 = (-1)(-7) = (-7)(-1) và x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}x-2y=1\\3x+y+1=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\3x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13}{7}\\y=\dfrac{3}{7}\end{cases}$ **(loại)**

TH2: $\begin{cases}x-2y=7\\3x+y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=7\\3x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$ **(nhận)**

TH3: $\begin{cases}x-2y=-1\\3x+y+1=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-1\\3x+y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-17}{7}\\y=\dfrac{-5}{7}\end{cases}$ **(loại)**

TH4: $\begin{cases}x-2y=-7\\3x+y+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-7\\3x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-11}{7}\\y=\dfrac{19}{7}\end{cases}$ **(loại)**

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (1;-3)

Cách 2:

$$3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0\Leftrightarrow 3x^2-6xy+xy-2y^2+x-2y=7$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-2y)+y(x-2y)+(x-2y)=7\Leftrightarrow(x-2y)(3x+y+1)=7$$

Do đó, ta có bảng sau:

x – 2y	7	1	-7	-1
3x +y +1	1	7	-1	-7

Vì $x,y\in Z$ nên từ bảng ta chỉ có x = 1 và y = 3 là nghiệm nguyên của phương trình.

b) Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Với mọi $n\in N^*$**, ta có** $2012^{4n}\vdots 4,\ 2014^{4n}\vdots 4,\ 2013^{4n}=\left(2013^{4n}-1^{4n}\right)+1$ **chia cho 4 dư 1 (vì** $\left(2013^{4n}-1^{4n}\right)\vdots(2003-1)$**. Mà 2013 -1 = 2012 và** $2012\vdots 4$**) và** $2015^{4n}=\left[2015^{4n}-(-1)^{4n}\right]+1$ **chia cho 4 dư 1 (vì** $\left[2015^{4n}-(-1)^{4n}\right]\vdots\left[2015-(-1)\right]$**. Mà 2015 - (-1) = 2016 và** $2016\vdots 4$**)**

Câu 3: **(1 điểm) Cho x và y là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x+y\le 1$. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(x^2+\frac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{4x^2}\right)$.**

Ta có:

$$P=\left(x^2+\frac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{4x^2}\right)=x^2y^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16x^2y^2}=x^2y^2+\frac{1}{16x^2y^2}+\frac{1}{2}=\left(x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}\right)+\frac{15}{256x^2y^2}+\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si cho 2 số dương, ta có:

$$x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}\ge 2\sqrt{x^2y^2\cdot\frac{1}{256x^2y^2}}=\frac{1}{8}\qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si cho 2 số dương, ta có:

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ **mà** $x+y\le 1$ **nên** $1\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 1\ge 16x^2y^2\Leftrightarrow \frac{1}{x^2y^2}\ge 16\Leftrightarrow \frac{15}{256x^2y^2}\ge\frac{15}{16}\quad (2)$

Từ (1) và (2), ta suy ra $\left(x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}\right)+\frac{15}{256x^2y^2}\ge\frac{1}{8}+\frac{15}{16}$

$$\Leftrightarrow\left(x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}\right)+\frac{15}{256x^2y^2}+\frac{1}{2}\ge\frac{25}{16}\Leftrightarrow P\ge\frac{25}{16}$$

Vậy $P_{min}=\frac{25}{16}$**. Dấu ‘’=’’ xảy ra khi** $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 4: **(4 điểm)**

a) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BC tại E. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt CD tại F. Chứng minh O, E, F thẳng hàng.

Gọi M là điểm đối xứng của A qua EF

Ta có $\mathrm{EAF}=\mathrm{EMF}$ (tính chất đối xứng trục) (1)

Mà $\mathrm{EAF}+\mathrm{BAD}=\mathrm{EAF}+\mathrm{BAE}+\mathrm{EAD}=\mathrm{BAF}+\mathrm{EAD}=90^0+90^0=180^0$

Mặt khác $\mathrm{ECF}+\mathrm{BAD}=180^0$ (tứ giác ABCD nội tiếp)

Ta có $\mathrm{EAF}+\mathrm{BAD}=\mathrm{ECF}+\mathrm{BAD}(=180^0)$

$\Rightarrow \mathrm{EAF}=\mathrm{ECF}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\Rightarrow \mathrm{EAF}=\mathrm{ECF}\Rightarrow$ **Tứ giác ECMF nội tiếp**

$\Rightarrow \mathrm{DCM}=\mathrm{FEM}$ (3)

Mà $\mathrm{FEA}=\mathrm{FEM}$ (4) (tính chất đối xứng trục) và

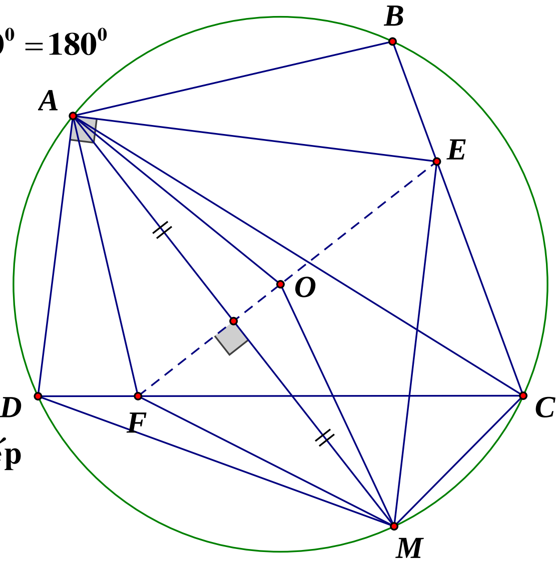
$\mathrm{FEA}=\mathrm{DAM}$ (5) (cùng phụ với EAM)

Từ (3), (4), (5) ta có $\mathrm{DCM}=\mathrm{DAM}\Rightarrow$ Tứ giác ACMD nội tiếp

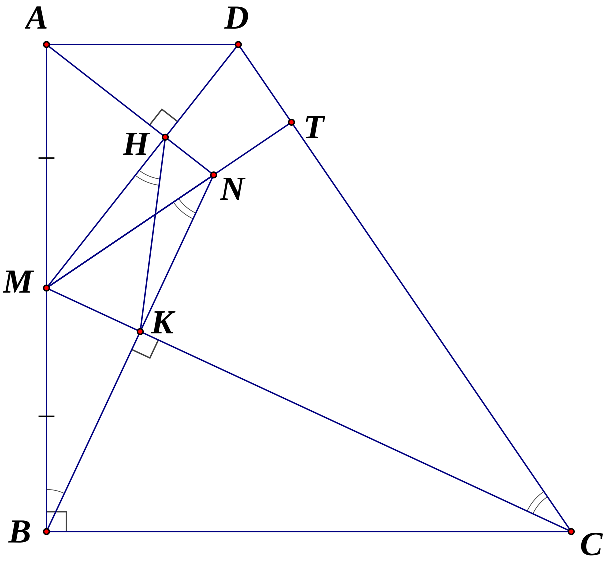
$\Rightarrow$M thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow$OM = OA (=R)

Ta có O thuộc trung trực của AM. Nên $O\in EF$.

Vậy ba điểm O, E, F thẳng hàng.



b) Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N. Chứng minh $MN \perp CD$.



Gọi H là giao điểm của AN và MD; K là giao điểm của BN và MC; T là giao điểm của MN và CD.

$$\begin{cases} MA^2 = MH.MB \\ MB^2 = MK.MC \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow MH.MB = MK.MC \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MB}$$

Xét ΔMHK **và** ΔMCD**, ta có:** $\begin{cases} HMK = CMD \left(\text{góc chung}\right) \\ \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MK}{MB} \left(\text{cmt}\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta MHK \backsim \Delta MCD \left(c - g - c\right)$

$\Rightarrow MHK = MCD$

mà $HMK = MNK$ **(tứ giác MHNK nội tiếp)** **nên** $MNK = MCD \Rightarrow MNK = KCT$

$\Rightarrow$ **tứ giác NKCT nội tiếp (...)** $\Rightarrow MKN = NCT = 90^0 \Rightarrow MN \perp CD$ **tại T**

<u>Câu 5:</u> (1 điểm)
Sau khi điểm danh xong, lớp trưởng tuyên bố: "Số các bạn có mặt là một số có hai chữ số, số này bé hơn 2 lần tích hai chữ số của nó 9 đơn vị". Hỏi có bao nhiêu bạn có mặt?

Gọi số học sinh có mặt là $\overline{ab}$ ($a, b \in N; 1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$)

Theo đề bài ta có $\overline{ab} = 2ab - 9 \Leftrightarrow 10a + b = 2ab - 9 \Leftrightarrow 2ab - 10a - b = 9$

$\Leftrightarrow 2a\left(b - 5\right) - \left(b - 5\right) = 14 \Leftrightarrow \left(b - 5\right)\left(2a - 1\right) = 14$

Ta có 2a – 1 là ước của 14. Mà 2a – 1 là số nguyên dương lẻ
Do đó 2a – 1 = 1 hoặc 2a – 1 = 7 $\Leftrightarrow$ **a = 1 hoặc a = 4**

- **Nếu a = 1 thì b – 5 = 14** $\Leftrightarrow$ **b = 19 (loại)**
- **Nếu a = 4 thì b – 5 = 2** $\Leftrightarrow$ **b = 7 (thích hợp). Ta có** $\overline{ab} = 47$

Vậy số học sinh có mặt là 47 học sinh.

HẾT